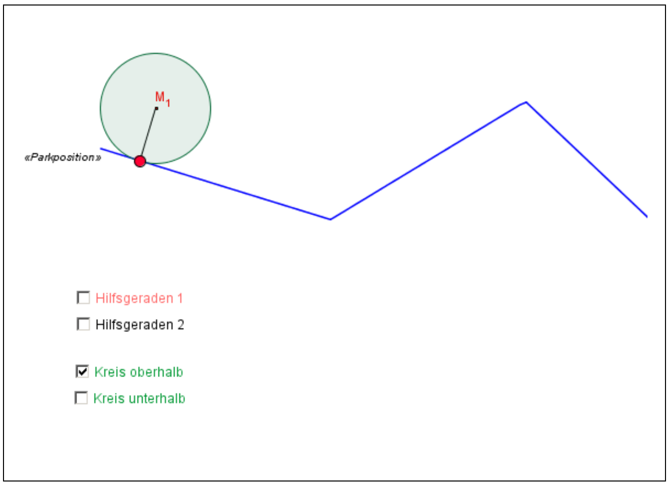
Kreise abrollen

Aufgabenstellung



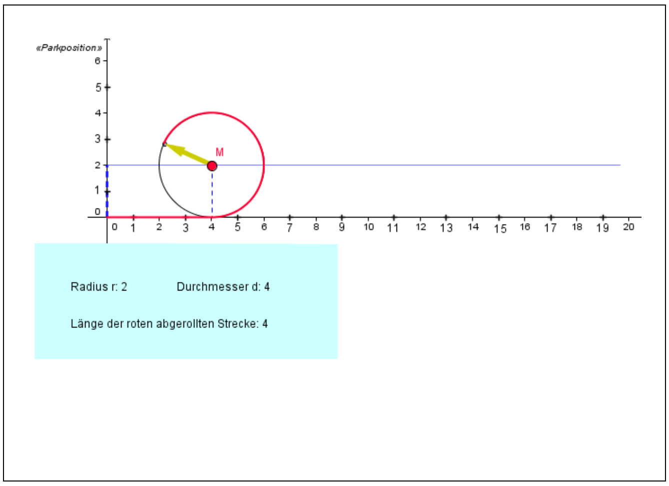
1. Wie sieht der Weg aus, den der Mittelpunkt M_1 des Kreises beschreibt?
2. Die Räder hier rollen nicht ganz fliessend über die «Talknicke» oder über die «Bergknicke» im Streckenzug. Was entspricht nicht der Wirklichkeit in dieser Simulation?
3. Welche Beziehung zum blauen Streckenzug haben
   a) die Hilfsgeraden 1?
   b) die Hilfsgeraden 2?
4. Wie kannst du die Wege der Kreismittelpunkte entlang des Streckenzuges konstruieren?
   Unterscheide dabei «Talknicke» und «Bergknicke» im Streckenzug.

Antworten

1. Der Mittelpunkt bewegt sich parallel zum Streckenzug.
2. *Mögliche Antwort:*
   – Im «Talknick» rollt das Rad zu weit. Sobald das Rad auf die ansteigende Strecke trifft, müsste sich die Bewegungsrichtung des Mittelpunktes ändern.
   – Wenn das Rad über einen «Bergknick» rollt, so beschreibt der Mittelpunkt einen Kreisbogen. Dieser Kreisbogen ist auf dem Bildschirm nicht sichtbar.
3. a) Die Hilfsgeraden 1 stehen bei «Bergknicken» und «Talknicken» senkrecht zu den Streckenabschnitten.
   b) Die Hilfsgeraden 2 sind die Winkelhalbierenden zwischen zwei benachbarten Streckenabschnitten.
4. *Mögliche Antwort:*
   – Konstruktion des Streckenzugs bei «Talkknicken»:
   Der Weg des Mittelpunktes verläuft parallel zum Streckenabschnitt bis zur Winkelhalbierenden im Knick.
   Dort ändert der Weg seine Richtung und verläuft parallel zum neuen Streckenabschnitt.
   Der Weg kann mit Hilfe von zwei parallelen Geraden konstruiert werden.
   – Konstruktion des Streckenzugs bei «Bergknicken»:
   Der Mittelpunkt des Kreises bewegt sich auf einem Kreisbogen über den «Bergknick».
   Man konstruiert auf jeder Seite des Knicks die Parallele bis zur senkrechten Hilfgeraden 1 und verbindet die beiden Punkte mit einer Kreislinie, desren Zentrum der «Bergknick» bildet.

Kreisumfang

Aufgabenstellung



1. Je grösser der Durchmesser d eines Kreises ist, desto länger ist sein Umfang U.
   Wie lässt sich diese Beziehung zwischen d und U beschreiben?
   Verschiebe den Mittelpunkt, bis der rote Umfang genau einmal abgerollt ist.
2. Wiederhole das Abrollen des Kreises mit verschiedenen Radien.
   a) Erstelle eine Tabelle, in der du die beiden Werte für d und U jeweils protokollierst.
   b) Dividiere U durch d bei jedem Wertepaar in der Tabelle. Was stellst du fest?
   c) Beschreibe die Beziehung zwischen U und d.

Antworten

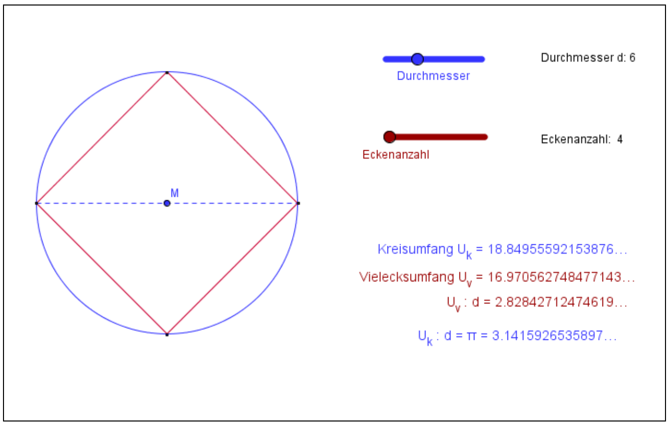
1. *Mögliche Beschreibung:*
   Umfang und Durchmesser des Kreises sind proportional zueinander.
2. a) und b)

d	2	2.4	3	4	4.4	5	5.4	5.6	6
U	6.25	7.52	9.41	12.53	13.8	15.69	16.96	17.57	18.84
U:d	3.125	3.133…	3.136…	3.1325	3.136…	3.138	3.140…	3.1375	3.14…

   c) *Mögliche Beschreibung:*
   Der Umfang ist ungefähr 3.14-mal so lang wie der Kreisdurchmesser.

Annäherung an π 1

Aufgabenstellung



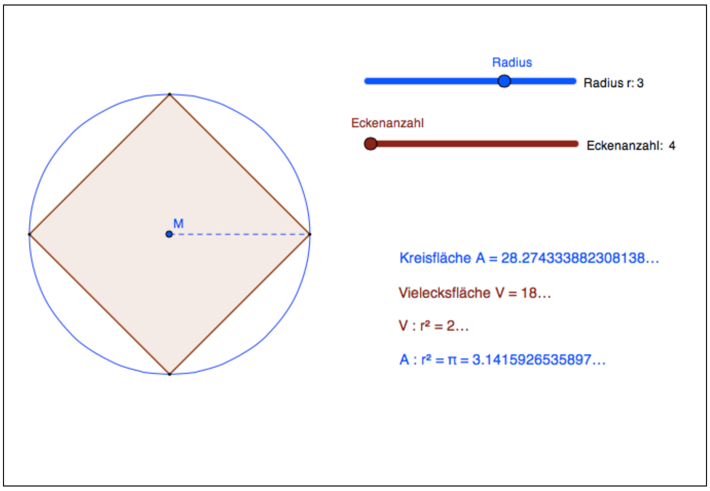
1. Der Umfang des Vielecks ist kleiner als der Kreisumfang.
   Erhöhe die Anzahl Ecken.
   Beobachte, wie sich der Vieleckumfang (rot) immer mehr der Kreislinie (blau) annähert.
2. Der Kreisumfang U_k und der Vieleckumfang U_v werden durch d dividiert.
   Beobachte, wie sich diese beiden Zahlen immer näher kommen.
3. Wie viele Ecken sind nötig, bis π
   a) auf 1,
   b) auf 2,
   c) auf 3 Stellen nach dem Dezimalpunkt angenähert ist?
4. Hat die Grösse des Durchmessers einen Einfluss darauf, wie schnell U_v sich U_k annähert?

Antworten

1. –
2. –
3. a) 12 Ecken
   b) 57 Ecken
   c) 94 Ecken
4. Die Grösse des Durchmessers hat keinen Einfluss.

Annäherung an π 2

Aufgabenstellung



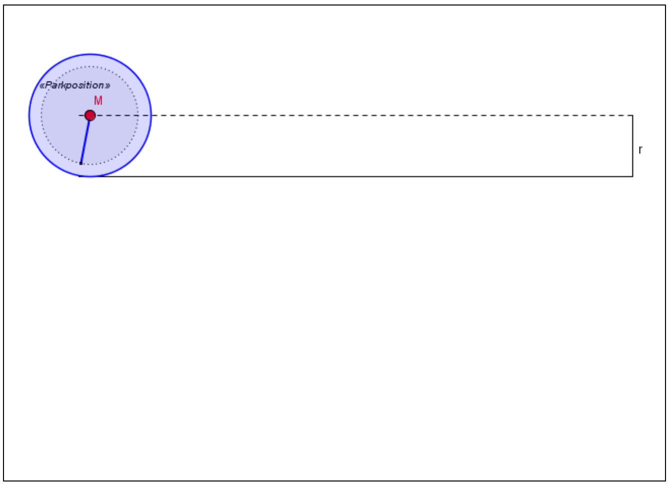
1. Die Fläche des Vielecks ist kleiner als die Kreisfläche.
   Erhöhe die Anzahl Ecken.
   Beobachte, wie sich die braune Vieleckfläche immer mehr der Kreisfläche annähert.
2. Die Kreisfläche A und die Vieleckfläche V werden durch r^2 dividiert.
   Beobachte, wie sich die Werte von A und V immer näher kommen.
3. Wie viele Ecken sind nötig, bis π
   a) auf 1,
   b) auf 2 Stellen nach dem Dezimalpunkt angenähert ist?
4. Ein dem Kreis eingeschriebenes regelmässiges 150-Eck lässt sich von Auge kaum mehr von der Kreislinie unterscheiden. Benützt man in Rechnungen ein π mit 3 Stellen nach dem Dezimalpunkt (3.141), ist es so, wie wenn man statt mit dem Kreis mit einem Vieleck rechnen würde. Wie viele Ecken hätte dieses Vieleck mindestens?

Antworten

1. –
2. –
3. a) 23 Ecken
   b) 114 Ecken
4. Das Viereck hätte mindestens 150 Ecken (maximal einstellbare Eckenzahl bei dieser Aufgabe).

Zykloide

Aufgabenstellung



1. Wenn ein Kreis auf einer Geraden abrollt, dann beschreibt ein Punkt, der starr mit dem Kreis verbunden ist, eine Zykloide (Radlinie, Rollkurve).
   Beschreibe das Aussehen der Zykloide:
   a) wenn der Punkt
      innerhalb des Kreises liegt,
      wie der Deckel des Ventils bei einem Velorad.
   b) wenn der Punkt
      auf der Kreislinie liegt,
      wie bei einer Markierung auf der Lauffläche eines Reifens.
   c) wenn der Punkt
      ausserhalb der Kreisfläche liegt,
      wie beim Spurkranz eines Eisenbahnrades.
2. Finde weitere Beispiele aus dem Alltag für die Aufgaben a und b.

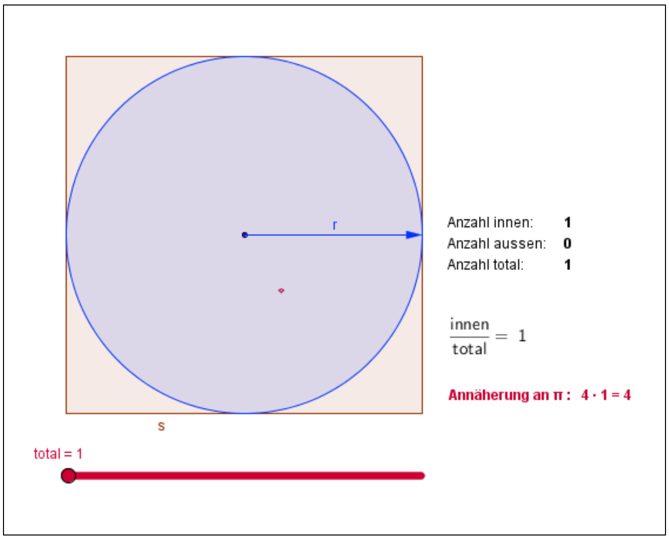
Antworten

1. a) *Mögliche Beschreibung:*
   Der Punkt beschreibt eine «Wellenlinie», die immer oberhalb der Geraden verläuft.
   b) *Mögliche Beschreibung:*
   Der Punkt beschreibt aufeinanderfolgende Kreisbogen, deren Anfangs- und Endpunkte auf der Geraden liegen
   c) *Mögliche Beschreibung:*
   Der Punkt beschreibt Bögen, die teilweise unter der Geraden liegen und sich überschneiden.

2. b) *Mögliche Beispiele:*
   – bei Aufgabe a): Befestigungspunkt der Antriebsstange bei Dampflokomotiven
   – bei Aufgabe b): Kopf eines Nagels, der in einem Pneu steckt

Zufall und π

Aufgabenstellung



1. Berechne je den Inhalt der Quadratfläche und der Kreisfläche, wenn s = 1 ist.
2. Wenn Punkte zufällig auf die Quadratfläche fallen, so befindet sich ein Teil davon im Kreis.
   Die «Anzahl innen» zur «Anzahl total» wird sich ungefähr so verhalten, wie der Flächeninhalt des Kreises zum Flächeninhalt des Quadrats.

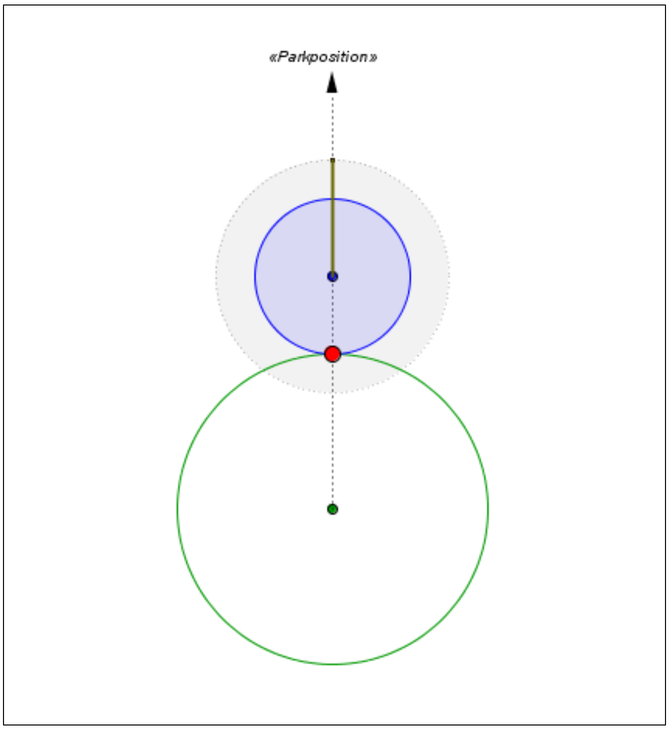
   Mit welcher Zahl muss die Kreisfläche multipliziert werden um π zu erhalten?
3. Lass immer mehr Punkte auf die Quadratfläche fallen und beobachte dabei die Zahlenangaben.
   Kommentiere deine Beobachtungen.

Antworten

1. – Quadratfläche: 1
   – Kreisfläche: 0.785…
2. Es gilt: $A_K = r^2\pi = \frac{s^2}{2^2} \cdot \pi$
   Wenn s = 1 ist, so gilt: $A_K = \frac{1}{2^2} \cdot \pi = \frac{1}{4} \cdot \pi$
   Die Kreisfläche muss mit 4 multipliziert werden.
3. *Mögliche Feststellungen:*
   Die Zahl nähert sich langsam π an. 1000 Punkte liefern erst den Wert 3.08.

Epizykloide

Aufgabenstellung



1. Rolle den Kreis ab und probiere verschiedene Einstellungen aus.
2. Wie muss der «Arm» eingestellt sein, damit die rote Kurve (die Epizykloide)
   a) den grünen Kreis nicht berührt,
   b) den grünen Kreis berührt,
   c) in die grüne Kreisfläche hinein ragt?
3. Wie müssen die beiden Radien eingestellt sein, damit die rote Kurve (die Epizykloide) eine geschlossene Figur ergibt?
4. Welche Einstellung erzeugt
   a) eine Herzkurve (Kardioide),
   b) eine Nierenkurve (Nephroide),
   c) einen Kreis?
5. Vorausgesetzt, die rote Kurve ist geschlossen:
   – Wie kann man voraussagen, wie oft die Kurve Einbuchtungen macht oder den grünen Kreis berührt oder Schleifen macht?
   – Begründe.

Antworten

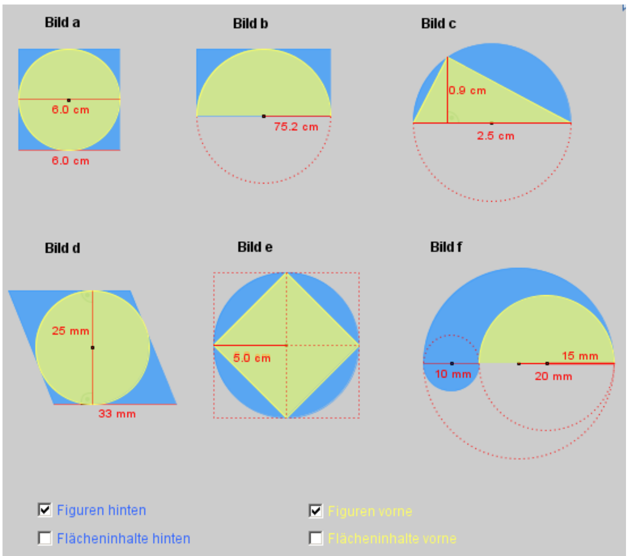
1. –
2. a) Der «Arm» muss kürzer sein als der blaue Kreisradius.
   b) Der «Arm» muss gleich lang sein wie der blaue Kreisradius.
   c) Der «Arm» muss länger sein als der blaue Kreisradius.
3. *Mögliche Formulierung:*
   Der grüne Kreisradius muss ein Vielfaches des blauen Kreisradius sein.
4. a) *Mögliche Formulierung:*
   Die beiden Kreisradien und der «Arm» müssen gleich lang sein.
   b) *Mögliche Formulierung:*
   Der blaue Kreisradius und der «Arm» müssen halb so lang wie der grüne Kreisradius sein.
   c) *Mögliche Formulierung:*
   Der «Arm» muss die Länge Null haben.
5. *Mögliche Formulierung:*
   Die Zahl der Einbuchtungen, Berührungspunkte oder Schleifen hängt vom ganzzahligen Verhältnis der beiden Kreisradien ab. Die Verhältniszahl ist gleich der Anzahl Einbuchtungen, Berührungspunkte oder Schleifen.

   Mögliche Begründung:
   Es hängt von der Länge des «Arms» ab, ob es Einbuchtungen, Berührungen oder Schleifen gibt. Der Umfang beim Kreis ist proportional zum Kreisradius. Der Umfang des blauen Kreises rollt auf dem grünen Kreis ab.

   Beispiele: $r_{grün} : r_{blau} = 1$ 1 Einbuchtung oder Schleife oder Berührungspunkt (z.B. Herzkurve)
   $r_{grün} : r_{blau} = 2$ 2 Einbuchtungen oder Schleifen oder Berührungspunkte (z.B. Nierenkurve)
   $r_{grün} : r_{blau} = 3$ 3 Einbuchtungen oder Schleifen oder Berührungspunkte

Figuren auf Figuren

Aufgabenstellung



1. Gelbe geometrische Figuren liegen auf blauen geometrischen Figuren.
Berechne für jedes Bild in drei Schritten den Inhalt der blauen Fläche, die so noch sichtbar ist:
   a) Blende die gelben Figuren aus und berechne den Inhalt der ganzen blauen Figuren.
   b) Blende die blauen Figuren aus und die gelben Figuren wieder ein. Berechne den Inhalt der ganzen gelben Figuren.
   c) Was ist als dritter Schritt zu tun?

Antworten

1. a) Flächeninhalt der blauen Figuren:

Bild a: $6.0 \cdot 6.0 = 36\ \text{cm}^2$
Bild b: $150.4 \cdot 75.2 = 11310.08\ \text{cm}^2$
Bild c: $\pi \cdot 2.5^2 : 4 : 2 = 2.454\ldots\ \text{cm}^2$
Bild d: $33 \cdot 25 = 825\ \text{mm}^2$
Bild e: $\pi \cdot 5.0^2 = 78.539\ldots\ \text{cm}^2$
Bild f: $\pi \cdot 20^2 : 2 + \pi \cdot 5^2 : 2 = 667.588\ldots\ \text{mm}^2$

b) Flächeninhalt der gelben Figuren:

Bild a: $\pi \cdot 6.0^2 : 4 = 28.274\ldots\ \text{cm}^2$
Bild b: $\pi \cdot 75.2^2 : 2 = 8882.916\ldots\ \text{cm}^2$
Bild c: $2.5 \cdot 0.9 : 2 = 1.125\ \text{cm}$
Bild d: $\pi \cdot 25^2 : 4 = 490.873\ldots\ \text{mm}^2$
Bild e: $5.0 \cdot 5.0 \cdot 2 = 50\ \text{cm}^2$
Bild f: $\pi \cdot 15^2 : 2 = 353.429\ldots\ \text{mm}^2$

c) *Dritter Schritt:*
Die gelbe Fläche muss von der blauen Fläche subtrahiert werden.

Bild a: $7.725\ldots\ \text{cm}^2$
Bild b: $2427.163\ldots\ \text{cm}^2$
Bild c: $1.329\ldots\ \text{cm}^2$
Bild d: $334.126\ldots\ \text{mm}^2$
Bild e: $28.539\ldots\ \text{cm}^2$
Bild f: $314.159\ldots\ \text{mm}^2$